О ЛУЧЕВОМ РАВНОВЕСИИ ВОДОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК, ОКРУЖАЮЩИХ ЗВЕЗДЫ*

Проблема лучевого равновесия в газовых оболочках, окружающих звезды (например, в протяженных хромосферах, в расширяющихся оболочках вокруг Новых звезд, в планетарных туманностях), представляет большие трудности по той причине, что в этих оболочках нельзя и приближенно предполагать наличие локального термодинамического равновесия. Более того, основные явления, характерные для этих оболочек (например, образование эмиссионных линий), вызваны как раз нарушением термодинамического равновесия.

В случае, когда среда состоит из атомов одного сорта, обладающих k различными уровнями энергии, задача о лучевом равновесии сводится вообще к решению уравнений переноса вида:

$$\frac{dI_{il}}{ds} = -\frac{h\nu_{il}}{c\Delta\nu_{il}}\left(B_{i\to l}n_i - B_{l\to i}n_l\right)I_{il} + \frac{A_{l\to i}\,h\nu_{il}}{4\pi\Delta\nu_{il}}\cdot n_l \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, l-1;\ l = 2, 3, \cdots, k),$$

где i и l — номера нижнего и верхнего уровней для данной спектральной линии, I_{il} — интенсивность излучения в этой линии, ν_{il} — ее частота, $\Delta\nu_{il}$ — ее ширина, $B_{i\to l}$, $B_{l\to i}$, $A_{l\to i}$ — эйнштейновские коэффициенты вероятностей соответствующих переходов, c — скорость света, h — постоянная Планка и n_i — число атомов в единице объема на i-том уровне.

К этим $\dfrac{k(k-1)}{2}$ уравнениям переноса присоединяются $k-1$ условий стационарности для чисел n_i:

$$0 = \frac{dn_i}{dt} = \sum_{l=i+1}^{k}\left\{n_l\left(A_{l\to i} + B_{l\to i}\rho_{il}\right) - n_i B_{i\to l}\rho_{il}\right\} -$$

$$-\sum_{l=1}^{i-1}\left\{n_i\left(A_{i\to l} + B_{i\to l}\,\rho_{li}\right) - n_l B_{l\to i}\,\rho_{li}\right\}, \tag{2}$$

---

* Уч. Зап. ЛГУ, № 31, 5, 1939.

где

$$\rho_{il} = \frac{1}{c}\int I d\omega \tag{3}$$

представляет плотность излучения в частоте ν_{il}.

С другой стороны, мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n, \tag{4}$$

где n (концентрация атомов на всех k — уровнях) представляет собой функцию координат, считающуюся в теории лучевого равновесия заданной. Уравнения (1), (2) и (4) вместе составляют систему $\frac{k(k+1)}{2}$ уравнений для $\frac{k(k+1)}{2}$ неизвестных функций I_{il} и n_i.

Правда, мы можем свести дело к решению системы одних лишь уравнений переноса, внеся в уравнение (1) из уравнений (2) и (4) выражения n_i через ρ_{il}, т. е. $\int I_{il} d\omega$. Совокупность уравнений переноса превратится тогда в систему $\frac{k(k-1)}{2}$ нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Гигантская трудность общего или численного решения этой системы очевидна; поэтому до сих пор разобраны лишь некоторые простейшие случаи.

Так, например, теория рассеяния в звездной атмосфере Шварцшильда-Шустера (монохроматическое лучевое равновесие) представляет собой решение проблемы для $k = 2$. Это решение оказалось весьма полезным для теории линий поглощения. Однако в случае эмиссионных линий для построения теории, хотя бы и качественной, необходимо рассматривать минимум три разных уровня. Но и для случая трех уровней задача может быть решена до конца лишь при наличии некоторых упрощающих условий. Так, например, автор показал, что сильная разреженность излучения в планетарных туманностях позволяет свести задачу их лучевого равновесия к такой проблеме трех уровней, в которой уравнение для поля излучения в одной из частот L_c решается независимо от других полей. Однако в другой работе было показано, что уже к туманным оболочкам малого радиуса, окружающим звезды с эмиссионными линиями, где разреженность излучения не так сильна, как в планетарных туманностях, разработанная для последних теория неприменима. Поэтому для каждого случая приходится применять свои приближенные приемы решения задачи.

Между тем мы увидим ниже, что хотя решить рассматриваемую проблему k—состояний до конца в общем виде и не представляется сейчас возможным, все же в самом общем случае можно установить ряд соотношений, могущих быть названными формулами сохранения потоков определенных квантов. В случае наличия симметрии какого-либо типа (плоско-параллельные слои или сферическая симметрия эти соотношения приводят непосредственно к k—I интегралам системы) (1). К выводу этих соотношений мы и перейдем.

Сохранение числа квантов каждой серии

Все эти соотношения носят чрезвычайно простой характер и могут быть получены почти без всяких алгебраических выкладок, из одних физических соображений. Для простоты остановимся на водородных атомах.

Для того чтобы, получить первое соотношение, используем первое из соотношений стационарности (2). Оно имеет вид при $i = 1$:

$$\sum_{l=2}^{\infty} n_l \left(A_{l\to 1} + B_{l\to 1}\rho_{1l}\right) - \sum_{l=2}^{\infty} n_1 B_{1\to l}\rho_{1l} = 0;$$

в знак суммы включены ионизации и соответственно рекомбинации.

Выражая неизменность числа атомов в основном состоянии, соотношение это в то же время указывает, что число квантов, излучаемых в единицу времени в единице объема в частотах Лаймановской серии, равно числу поглощаемых квантов в тех же частотах. Поэтому должно соблюдаться правило сохранения Лаймановских квантов, заключающееся в том, что хотя кванты той или иной линии Лаймановской серии могут замещаться вообще квантами других линий той же серии, но общее число Лаймановских квантов не меняется.

Точно так же второе из уравнений (2),

$$\sum_{l=3}^{k} n_l \left(A_{l\to 2} + B_{l\to 2}\rho_{2l}\right) - \sum_{l=3}^{k} n_2 B_{2\to l}\rho_{2l} = n_2 \left(A_{2\to 1} + B_{2\to 1}\rho_{12}\right) - n_1 B_{1\to 2}\rho_{12},$$

указывает на то, что превышение числа квантов, излучаемых в единице объема во всех линиях Бальмеровской серии, над числом квантов, поглощаемых во всех линиях той же серии, равно превышению числа квантов, излучаемых в линии L_α над числом квантов, поглощаемых в этой линии. Иными словами, в результате этих процессов излучения и поглощения разность между числом квантов во всех линиях Бальмеровской серии и числом квантов в линии L_α остается неизменной.

Далее, таким же образом убеждаемся, что в результате рассматриваемых процессов излучения и поглощения разность между числом квантов во всех линиях Пашеновской серии (включая и континуум за границей серии) и числом квантов в линиях H_α и L_β вместе остается неизменной.

Для удобства формулировки введено понятие об алгебраической сумме чисел квантов в какой-либо серии (в единице объема, во всем объеме и т. д.).

Под *алгебраической суммой* чисел квантов в данной серии мы будем понимать сумму чисел квантов во всех линиях этой серии (включая континуум за границей серии), взятых с положительным знаком, и чисел квантов во всех линиях, соответствующих переходам из основного состояния этой серии в более низкие, взятых с отрицательным знаком.

Тогда общий результат можно сформулировать так: *алгебраическая сумма чисел квантов каждой спектральной серии не меняется от процессов излучения и поглощения.* Соблюдая то же правило суммирования, мы можем также сказать, что алгебраическая сумма чисел квантов, поглощенных в данной серии в единице объема, равняется алгебраической сумме излученных квантов. Таким образом, по отношению к *алгебраической сумме чисел* квантов каждой серии в отдельности имеет место лучевое равновесие.

Уравнения „непрерывности"

Для каждой линии мы можем образовать вектор потока $\vec{H}_\nu$ с компонентами

$$H_x = \Delta\nu \int I_\nu \cos\alpha d\omega; \quad H_y = \Delta\nu \int I_\nu \cos\beta d\omega; \quad H_z = \Delta\nu \int I_\nu \cos\gamma d\omega,$$

где α, β и γ углы, образованные направлением излучения с осями x, y, z соответственно.

Разделив вектор $\vec{H}_\nu$ на энергию кванта $h\nu$, мы получим выражение для вектора, характеризующего *поток числа квантов* в данной линии. Произведем алгебраическое сложение векторов потоков чисел, относящихся к i-той серии (Лаймановская серия считается первой):

$$\vec{N}_i = \sum{}' \frac{\vec{H}_\nu}{h\nu}. \tag{5}$$

Штрих при знаке суммы означает, что суммирование ведется по линиям i-той серии и что $\vec{H}_\nu$ для частот, соответствующих переходам из основного состояния для данной серии в более низкие, взяты с обратным знаком.

Величина $\vec{N}_i$ может быть названа алгебраической суммой потоков чисел квантов по линиям i-той серии. Поскольку от процессов излучения и поглощения алгебраическая сумма концентраций световых квантов в данной серии не меняется, то расхождение вектора $\vec{N}_i$ должно исчезать:

$$\operatorname{div} \vec{N}_i = \operatorname{div} \sum' \frac{\vec{H}_\nu}{h\nu} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, k-1). \tag{6}$$

Эти $k-1$ уравнений могут быть названы уравнениями непрерывности для поля излучения.

Уравнения (6), к которым мы пришли из физических соображений, легко могут быть проверены. Для этого стоит лишь написать:

$$\operatorname{div} \vec{N}_i = \operatorname{div} \sum' \frac{\vec{H}_\nu}{h_\nu} = \sum' \frac{1}{h\nu} \operatorname{div} \vec{H}_\nu =$$

$$= \sum \frac{\Delta\nu}{h\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int I_\nu \cos\alpha d\omega + \frac{\partial}{\partial y} \int I_\nu \cos\beta d\omega + \frac{\partial}{\partial z} \int I_\nu \cos\gamma d\omega \right\} =$$

$$= \sum' \frac{\Delta\nu}{h\nu} \int \left\{ \frac{\partial I_\nu}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial I_\nu}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial I_\nu}{\partial z} \cos\gamma \right\} d\omega = \sum' \frac{\Delta\nu}{h\nu} \int \frac{\partial I_\nu}{\partial s} d\omega$$

и, подставив в правую часть значение $\frac{dI_\nu}{\partial s}$ из уравнения (1), принять во внимание уравнение (2).

Плоско-параллельные слои

В случае плоско-параллельных слоев уравнения (6) допускают интегралы

$$\vec{N} = \vec{\alpha}_i, \tag{7}$$

где $\vec{\alpha}_i$ — постоянные векторы, направленные перпендикулярно к слоям. Обозначая величину вектора той же буквой, но без черты, мы имеем поэтому:

$$\sum{}' \frac{H_\nu}{h\nu} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, k-1), \tag{8}$$

т. е. k—1 интегралов алгебраической суммы потоков чисел квантов в каждой серии.

В качестве примеров можно привести первые три серии:

1) поток числа всех Лаймановских квантов постоянен;

2) поток числа всех Бальмеровских квантов минус поток числа квантов в линии L_α постоянен, и

3) поток числа всех Пашеновских квантов минус потоки чисел квантов в линиях H_α и L_β постоянен.

Некоторые применения полученных интегралов проблемы к конкретным объектам будут даны в другой работе*. Здесь же мы укажем лишь на то, что полученные интегралы открывают путь к нахождению дальнейших интегралов в приближенном виде.

В самом деле, в случае плоско-параллельных слоев $ds = sec\,\alpha dx$. Подставив это в уравнение (1), помножив обе части на $\cos\alpha$ и проинтегрировав по всем телесным углам, получим:

$$\frac{d}{dx}\int I_{il}\cos^2\alpha d\omega = -\frac{h\nu_{il}}{c\Delta\nu_{il}}(B_{i\to l} - B_{l\to i}\,n_l)\int I_{il}\cos\alpha dz.$$

Положим $i = 1$, т. е. возьмем частный случай линий Лаймановской серии. Тогда, пренебрегая эйнштейновским отрицательным поглощением, а также внеся для потока его обозначение

$$\Delta\nu\int I_{il}\cos\alpha dz = H_{il},$$

мы получим:

$$\frac{d}{dx}\int I_{1l}\cos^2\alpha d\omega = -\frac{h\nu_{1l}}{c\,(\Delta\nu_{1l})^2}B_{1l}n_1 H_{1l}$$

или

$$\frac{c\,(\Delta\nu_{1l})^2}{(h\nu_{1l})^2}\,\frac{1}{B_{1l}}\,\frac{d}{dx}\int I_{1l}\cos^2\alpha d\omega = -\frac{n_1 H_{1l}}{h\nu_{1l}}\,.$$

Суммируя по всем линиям Лаймановской серии и интегрируя по x, получим:

$$\sum_l \frac{c\,(\Delta\nu_{1l})^2}{(h\nu_{1l})^2}\,\frac{1}{B_{1l}}\int I_{1l}\cos^2\alpha d\omega = \left(\sum_l \frac{H_{1l}}{h\nu_{1l}}\right)\cdot\tau,$$

* Это не сделано.—*Ред.*

где

$$\tau = \int_x^\infty n_1 dx$$

есть число атомов в первом состоянии на 1 $см^2$ над уровнем x. Вводя приближение Эддингтона,

$$\int I_{1l} \cos^2\alpha d\omega = \frac{1}{3}\int I_{1l} d\omega = \frac{1}{3} I_{1l},$$

мы получаем:

$$\frac{1}{3}\sum_l \frac{c\Delta\nu_{1l}}{(h\nu_{1l})^2}\frac{1}{B_{1l}} I = \left(\sum_l \frac{H_{1l}}{h\nu_{1l}}\right)\tau,$$

т. е. некоторую взвешенную сумму плотностей излучения в данной серии, как функцию оптической глубины.

Критические замечания

Строго говоря, полученные результаты справедливы лишь в том случае, когда частоты различных линий не перекрываются. В случае дискретных линий дело так и обстоит. Но для непрерывных спектров за границей серии мы почти всегда имеем такое перекрытие. Так, например, в случае водорода непрерывный спектр за границей Лаймановской серии мы относим к Лаймановской серии. Между тем, частоты этого непрерывного спектра могут поглощаться вообще атомами водорода, находящимися, например, на втором уровне. Строго говоря, это приводит к обмену квантами разных серий и поэтому к нарушению закона сохранения потока числа квантов в каждой серии.

Однако этот обмен квантами практически должен мало сказаться на первых двух-трех сериях, представляющих, как правило, наибольший теоретический интерес. В самом деле, вероятность поглощения, например, кванта с частотой, превосходящей частоту границы Лаймановской серии, атомом водорода, находящимся во втором состоянии, настолько мала, что мы можем спокойно считать Бальмеровский континуум прерывающимся у границы Лаймановской серии, а Пашеновский континуум—прерывающимся у границы Бальмеровской серии. Тогда каждая частота будет относиться к вполне определенной серии.

Для более высоких серий такое разделение может приводить уже к заметной ошибке*.

Примечание. За двадцать лет, прошедших после опубликования этой статьи, решение рассматриваемой в ней проблемы почти не продвинулось вперед, что объясняется, по-видимому, большой сложностью проблемы. Однако в случае движущейся среды проблема существенно упрощается. Это связано с тем, что при движении среды с градиентом скорости она становится как бы частично прозрачной для излучения в линиях вследствие эффекта Допплера. В указанном случае для каждого места среды можно составить алгебраические уравнения стационарности, обобщающие уравнения Силлие. Путем решения этих уравнений определяются числа атомов в различных состояниях и интенсивности эмиссионных линий.

---

* После сдачи в печать настоящей статьи появилось исследование Henyey'a (Astroph. Journal, **86**, 133, 1938), в котором сделаны те же выводы об интегралах потока.